

CdL in INFORMATICA E COMUNICAZIONE DIGITALE

Statistica Matematica

anno accademico 2005/06

ulteriori esercizi di Statistica Inferenziale

1. Siano X e Y due quantità con valori aleatori distribuiti in maniera approssimativamente normale. Due campioni indipendenti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 16$ misure hanno medie $\bar{X} = 5$ e $\bar{Y} = 3$, e varianze (stimate a partire dai campioni) $S_X^2 = 5$ e $S_Y^2 = 3$.

- (a) Controllare con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

- (b) Controllare con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ le due ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y.$$

- (c) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per le due attese μ_X e μ_Y .

2. $n = 300$ misure di una v.a. X che prende solo valori interi presentano le seguenti frequenze assolute

$$\begin{array}{cccccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ N_j = & 40 & 81 & 83 & 52 & 27 & 13 & 4 \end{array}$$

Dopo aver controllato le condizioni di applicabilità, verificare con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ se questi dati si adattano ad una distribuzione Binomiale $B(6, \frac{1}{3})$.

3. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y :

$$\begin{array}{l} X = \begin{array}{cccccccccc} 1.13 & 0.11 & 0.74 & 0.97 & 0.10 & 1.14 & 0.68 & 0.21 & 0.70 & 0.41 \\ 0.82 & 0.04 & 0.85 & 0.85 & 0.84 & 0.11 & 0.55 & 0.09 & 1.01 & 0.34 \\ 1.04 \end{array} \\ Y = \begin{array}{cccccccccc} 0.85 & 0.62 & 0.21 & 0.22 & 0.34 & 0.13 & 0.93 & 0.38 & 0.01 & 0.65 \\ 0.97 & 0.79 & 0.42 & 0.09 & 0.44 & 0.31 \end{array} \end{array}$$

- (a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2 .

- (b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2 .

- (c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

4. Il direttore di una scuola vuol sapere se l'opinione delle famiglie su un certo cambiamento di orario scolastico dipende dal fatto che la loro abitazione è situata in una zona urbana o in una zona rurale. Si chiede pertanto il parere di $n = 500$ famiglie ottenendo i risultati riportati nella Tabella:

	<i>favorevoli</i>	<i>contrari</i>	<i>indifferenti</i>	totali
<i>urbana</i>	123	36	41	
<i>rurale</i>	145	85	70	
totali				

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ per l'ipotesi H_0 : *l'opinione delle famiglie è indipendente dalla collocazione della loro abitazione.*

5. Due campioni indipendenti delle quantità X e Y con attese μ_X, μ_Y e varianze σ_X^2, σ_Y^2 sconosciute, sono composti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 31$ misure, e hanno medie empiriche $\bar{X} = 1.09$ e $\bar{Y} = 2.22$ e varianze empiriche (corrette) $S_X^2 = 2.34$ e $S_Y^2 = 3.11$.

- Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ fra le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

- Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.01$ fra le due ipotesi

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y.$$

6. Le misure in *cm* dell'altezza X di $n = 100$ persone si distribuiscono con le seguenti frequenze assolute

<i>altezza</i>	N_j
≤ 168	10
$[168, 169]$	17
$[169, 170]$	24
$[170, 171]$	27
$[171, 172]$	17
≥ 172	5

Eseguire un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ per verificare se questi dati si adattano ad una distribuzione normale con media $\mu = 170$ e varianza $\sigma^2 = 2$.

7. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y :

$$\begin{array}{r}
 X = \quad 5.49 \quad 4.37 \quad 4.42 \quad 3.79 \quad 5.57 \quad 3.37 \quad 4.30 \quad 3.14 \quad 4.55 \quad 4.23 \\
 \quad \quad 3.44 \quad 2.51 \quad 4.46 \quad 2.54 \quad 3.59 \quad 4.20 \quad 3.14 \quad 3.50 \quad 2.26 \quad 4.01 \quad 4.06 \\
 \\
 Y = \quad 5.84 \quad 2.29 \quad 3.71 \quad 5.09 \quad 7.07 \quad 5.61 \quad 4.83 \quad 3.29 \quad 5.55 \quad 6.78 \\
 \quad \quad 5.74 \quad 5.58 \quad 5.28 \quad 4.89 \quad 4.21 \quad 2.54 \quad 3.71 \quad 3.81 \quad 4.60 \quad 6.81 \\
 \quad \quad 4.60 \quad 5.10 \quad 4.72 \quad 6.33 \quad 5.76 \quad 4.86 \quad 3.50 \quad 5.18 \quad 6.60 \quad 5.47 \quad 3.49
 \end{array}$$

- (a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2 .

- (b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2 .

(c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

8. In un paese si vuol sapere se le risposte (*favorevole o contrario*) dei cittadini ad una determinata questione sono o meno influenzate dall'età. Si chiede pertanto il parere di $n = 600$ persone ottenendo i risultati riportati nella Tabella:

	<i>giovani</i>	<i>maturi</i>	<i>anziani</i>	totali
<i>favorevoli</i>	100	150	30	
<i>contrari</i>	126	120	74	
totali				

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ per l'ipotesi H_0 : *l'opinione dei cittadini è indipendente dall'età*.

9. Per verificare l'efficacia di un medicinale si misura la temperatura di $n = 30$ pazienti prima (X) e dopo (Y) l'assunzione del farmaco. I campioni accoppiati così ricavati sono i seguenti:

	36.8	37.9	38.3	38.1	38.3	38.8	36.3	37.7	37.1	36.9
$X =$	37.7	37.5	37.4	39.0	38.6	41.4	37.9	37.5	39.9	38.2
	38.4	37.7	37.5	36.6	38.0	38.6	39.0	37.6	38.0	39.5
	37.1	36.1	38.2	39.0	38.4	36.4	36.8	39.3	37.3	37.9
$Y =$	37.6	38.4	38.6	37.4	38.3	37.0	35.9	36.0	37.2	39.3
	36.0	36.6	38.0	38.0	38.7	39.4	37.6	36.1	39.0	36.4

Eseguire un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per verificare quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y.$$

10. Una ditta che vende automobili vuol sapere se l'età degli acquirenti (*giovani, maturi e anziani*) influenza la scelta del colore (*bianco, rosso o nero*) delle vetture vendute. Si esaminano i dati relativi a $n = 500$ contratti di vendita ottenendo i risultati riportati nella Tabella:

	<i>giovani</i>	<i>maturi</i>	<i>anziani</i>	totali
<i>bianco</i>	56	60	40	
<i>rosso</i>	47	87	38	
<i>nero</i>	23	64	85	
totali				

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ per l'ipotesi H_0 : *il colore scelto è indipendente dall'età degli acquirenti*.

11. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y :

$$\begin{array}{r}
 X = \begin{array}{ccccccccccc}
 1.13 & 0.11 & 0.74 & 0.97 & 0.10 & 1.14 & 0.68 & 0.21 & 0.70 & 0.41 \\
 0.82 & 0.04 & 0.85 & 0.85 & 0.84 & 0.11 & 0.55 & 0.09 & 1.01 & 0.34 \\
 1.04 & & & & & & & & & &
 \end{array} \\
 Y = \begin{array}{ccccccccccc}
 0.85 & 0.62 & 0.21 & 0.22 & 0.34 & 0.13 & 0.93 & 0.38 & 0.01 & 0.65 \\
 0.97 & 0.79 & 0.42 & 0.09 & 0.44 & 0.31 & & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

- (a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2 .
 (b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2 .
 (c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

12. Due campioni indipendenti delle quantità X e Y con attese μ_X, μ_Y e varianze σ_X^2, σ_Y^2 sconosciute, sono composti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 31$ misure, e hanno medie empiriche $\bar{X} = 1.09$ e $\bar{Y} = 2.22$ e varianze empiriche (corrette) $S_X^2 = 2.34$ e $S_Y^2 = 3.11$.

- Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ fra le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

- Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.01$ fra le due ipotesi

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y.$$

13. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y :

$$\begin{array}{r}
 X = \begin{array}{ccccccccccc}
 5.49 & 4.37 & 4.42 & 3.79 & 5.57 & 3.37 & 4.30 & 3.14 & 4.55 & 4.23 \\
 3.44 & 2.51 & 4.46 & 2.54 & 3.59 & 4.20 & 3.14 & 3.50 & 2.26 & 4.01 & 4.06 \\
 5.84 & 2.29 & 3.71 & 5.09 & 7.07 & 5.61 & 4.83 & 3.29 & 5.55 & 6.78 &
 \end{array} \\
 Y = \begin{array}{ccccccccccc}
 5.74 & 5.58 & 5.28 & 4.89 & 4.21 & 2.54 & 3.71 & 3.81 & 4.60 & 6.81 \\
 4.60 & 5.10 & 4.72 & 6.33 & 5.76 & 4.86 & 3.50 & 5.18 & 6.60 & 5.47 & 3.49
 \end{array}
 \end{array}$$

- (a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2 .
 (b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2 .
 (c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

14. Per verificare l'efficacia di un medicinale si misura la temperatura di $n = 30$ pazienti prima (X) e dopo (Y) l'assunzione del farmaco. I campioni accoppiati così ricavati sono i seguenti:

$$\begin{array}{r}
 X = \begin{array}{ccccccccccc}
 36.8 & 37.9 & 38.3 & 38.1 & 38.3 & 38.8 & 36.3 & 37.7 & 37.1 & 36.9 \\
 37.7 & 37.5 & 37.4 & 39.0 & 38.6 & 41.4 & 37.9 & 37.5 & 39.9 & 38.2 \\
 38.4 & 37.7 & 37.5 & 36.6 & 38.0 & 38.6 & 39.0 & 37.6 & 38.0 & 39.5
 \end{array} \\
 Y = \begin{array}{ccccccccccc}
 37.1 & 36.1 & 38.2 & 39.0 & 38.4 & 36.4 & 36.8 & 39.3 & 37.3 & 37.9 \\
 37.6 & 38.4 & 38.6 & 37.4 & 38.3 & 37.0 & 35.9 & 36.0 & 37.2 & 39.3 \\
 36.0 & 36.6 & 38.0 & 38.0 & 38.7 & 39.4 & 37.6 & 36.1 & 39.0 & 36.4
 \end{array}
 \end{array}$$

Eseguire un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per verificare quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y.$$

15. Due serie indipendenti di $n = 10$ ed $m = 9$ misure rispettivamente di due quantità aleatorie X ed Y danno i seguenti risultati

$$\begin{array}{r} X = \\ Y = \end{array} \begin{array}{cccccccccc} -1.34 & 1.32 & -0.96 & 0.29 & -1.41 & 0.23 & -0.56 & -0.32 & 0.66 & 1.27 \\ 4.83 & -2.52 & -1.79 & -2.85 & 1.45 & 1.09 & 1.87 & 2.03 & -2.60 & \end{array}$$

- (a) Calcolare le due medie \bar{X}, \bar{Y} , e le due varianze empiriche S_X^2, S_Y^2 .
 (b) Eseguire un test di Fisher bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi $\{H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\}$ contro l'ipotesi $\{H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2\}$.
16. Per giudicare il rendimento di due classi di $n = 31$ e $m = 21$ studenti si paragonano le medie dei voti (espressi in *trentesimi*) con i quali è stato superato un certo esame. I due campioni indipendenti sono i seguenti:

$$\begin{array}{r} X = \\ Y = \end{array} \begin{array}{cccccccccccccccc} 25 & 27 & 27 & 26 & 27 & 25 & 23 & 25 & 22 & 26 & 25 & 21 & 24 & 22 & 24 & 24 \\ 23 & 22 & 29 & 26 & 21 & 26 & 23 & 24 & 24 & 20 & 29 & 22 & 23 & 18 & 27 & \\ 21 & 19 & 19 & 22 & 25 & 20 & 25 & 23 & 26 & 27 & 22 & & & & & \\ 25 & 27 & 20 & 19 & 23 & 28 & 22 & 25 & 23 & 28 & & & & & & \end{array}$$

- (a) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

- (b) Decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y.$$

17. Siano dati i seguenti due campioni aleatori di $n = 16$ ed $m = 21$ misure:

$$\begin{array}{r} X = \\ Y = \end{array} \begin{array}{cccccccccccc} 9.08 & 9.80 & 10.76 & 9.58 & 10.56 & 9.99 & 10.61 & 8.86 & 10.41 & 10.27 & 7.94 \\ 8.61 & 10.38 & 9.77 & 11.30 & 10.09 & & & & & & \\ 3.99 & 4.04 & 4.20 & 6.11 & 7.26 & 6.43 & 5.23 & 5.93 & 3.71 & 4.53 & 4.91 \\ 5.33 & 3.95 & 4.60 & 3.87 & 5.25 & 4.09 & 5.21 & 5.85 & 4.10 & 4.26 & \end{array}$$

- (a) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

- (b) Calcolare gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.01$ per le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 .

18. Quattro dadi vengono lanciati assieme per $n = 10000$ volte, e in ogni lancio si osserva quante volte esce "6". I valori $j = 0, 1, 2, 3, 4$ del *numero dei "6" in ogni lancio* si presentano con le seguenti frequenze empiriche assolute

$$\begin{array}{r} j = \\ N_j = \end{array} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4775 & 3919 & 1143 & 156 & 7 \end{array}$$

- Controllare che le condizioni per l'applicabilità di un test del χ^2 sono soddisfatte.
- Verificare con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ che questi dati si adattano ad una distribuzione Binomiale $B(4, \frac{1}{6})$.

19. Tre dadi vengono lanciati assieme per $n = 8000$ volte, e in ogni lancio si osserva quante volte esce "6". I quattro valori $j = 0, 1, 2, 3$ del numero dei "6" in ogni lancio si presentano con le seguenti frequenze empiriche assolute

$$\begin{array}{rcccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 \\ N_j = & 4481 & 2868 & 603 & 48 \end{array}$$

- Controllare che le condizioni per l'applicabilità di un test del χ^2 sono soddisfatte.
- Verificare con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ che questi dati si adattano ad una distribuzione Binomiale $B(3, \frac{1}{6})$.

20. Per confrontare le attività di due materiali radioattivi si rilevano i numeri di particelle emesse in un intervallo di 10 minuti. Si misurano pertanto, rispettivamente per i due materiali, $n = 31$ e $m = 31$ valori di tale conteggio ottenendo i seguenti risultati:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} X = & 15 & 20 & 21 & 26 & 20 & 14 & 13 & 17 & 22 & 21 & 24 & 19 & 18 & 22 & 17 & 17 \\ & 19 & 23 & 21 & 22 & 31 & 14 & 14 & 24 & 24 & 21 & 20 & 25 & 17 & 20 & 20 & \\ Y = & 18 & 18 & 23 & 19 & 14 & 14 & 14 & 16 & 23 & 21 & 17 & 21 & 14 & 22 & 17 & 19 \\ & 16 & 9 & 22 & 13 & 17 & 19 & 16 & 19 & 22 & 11 & 16 & 9 & 19 & 21 & 13 & \end{array}$$

(a) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

(b) Decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y.$$

21. Un professore vuol sapere se i voti registrati per il suo esame dipendono o meno dall'anno di immatricolazione degli studenti. Egli esamina i voti $n = 378$ studenti immatricolati in diversi anni accademici e ottiene i risultati riportati nella Tabella:

	18 - 20	21 - 23	24 - 26	27 - 30	totali
2000/01	17	30	50	15	
2001/02	15	26	34	10	
2002/03	11	25	38	19	
2003/04	9	40	29	10	
totali					

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ per controllare l'ipotesi H_0 : il voto è indipendente dall'anno di immatricolazione.